11. cvičení - teorie

Definice (Určitý integrál)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*, a < b, f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ a F je primitivní funkce k f na (a,b). Pak

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b-) - F(a+),$$

kde

$$F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x), \quad F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x),$$

pokud limity i jejich rozdíl existují jako prvky $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Značení. $[F(x)]_a^b = F(b-) - F(a+)$, navíc pro $a < b$ definujme $[F(x)]_b^a$ jako $-[F(x)]_a^b$.

Poznámka. Některé integrály na nekonečných intervalech vychází konečně, jiné nekonečně. Např. lze ukázat: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \infty$ a $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1 < \infty$.

Věta (Aditivita integrálu)**.** Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}^*, a < c < b$.

(i) Pokud existuje $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, pak existují i $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) Pokud existují $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x, \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ a f je v c spojitá, pak existuje i $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a je roven

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Věta (Substituce pro určitý integrál)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, φ je diferencovatelná na intervalu (α, β), $\varphi(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, φ je ryze monotónní, $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ a F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$. Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = [F(y)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}.$$

Poznámka. Co se týče monotonie, tak postačující podmínkou je, že $\varphi'(x) \neq 0$ na (α, β)

Věta (Integrace per partes pro určitý integrál)**.** Nechť funkce f, g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$. Nechť dále f', g' jsou jejich derivace a jsou také spojité na intervalu $[a, b]$. Pak platí:

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

Příklad.

$$\int_0^1 2x - 1\mathrm{d}x = |y = 2x - 1, \mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x, 0 \to 2\cdot 0 - 1 = -1, 1 \to 2 \cdot 1 - 1 = 1| = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 y\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{4}\left(1^2 - (-1)^2\right) = 0$$

Zde je $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \varphi(x) = 2x - 1$ je ryze monotónní funkce t. ž. $\varphi(0) = -1, \varphi(1) = 1$.

!!! Vždy je třeba si hlídat definiční obory !!!

Goniometrické substituce

Nechť $R(\cdot,\cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \cos x, \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \sin x, \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \implies t = \tan x$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

  Pak
  $$\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t, \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}$$
- Vždy: $t = \tan \frac{x}{2}$ pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

  Pak
  $$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Odmocniny

Nechť $R(\cdot,\cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

U níže uvedených substitucí: k dopočtu $\mathrm{d}t$ nejdříve vyjádříme x v závislosti na t a pak teprve derivujeme (vizte příklad níže)

- $R\left(x, \sqrt[m]{x+a}\right), m \in \mathbb{N}, m > 1, \implies t = \sqrt[m]{x+a}$
- $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), m \in \mathbb{N}, m > 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \implies t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$
  - $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)^2 \implies \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x - x_1|$
  - $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) \implies t = \sqrt{a\frac{x-x_1}{x-x_2}}$
  - $ax^2 + bx + c$ nemá kořen $\implies t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$

Poznámka. Vyskytuje-li se v integrálu více odmocnin, převedeme je na mocniny téže odmocniny (např. $\sqrt{x}$ a $\sqrt[3]{x}$ převedeme na $(\sqrt[6]{x})^3$ a $(\sqrt[6]{x})^2$).